

Tripoli university

Faculty of engineering

EE department EE313

(Fall 2012)

Solved problems on "uniform plane waves in empty space".

ENG. Abdullah Aiad Abograin.

* ملخص القوانين :

(1) معادلة المجال الكهربائي لموجة تتحرك في اتجاه $\pm z$:

$$\hat{E}_x(z) = \underbrace{\hat{E}_m^+ e^{-j\beta_0 z}}_{\substack{\text{موجة تتحرك في} \\ \text{اتجاه } +z}} + \underbrace{\hat{E}_m^- e^{j\beta_0 z}}_{\substack{\text{موجة تتحرك في} \\ \text{اتجاه } -z}} \quad (\text{V/m})$$

حيث أن :-

\hat{E}_m^+ : أقصى اتساع للمجال الكهربائي للموجة المتحركة في اتجاه $+z$.
 \hat{E}_m^- : أقصى اتساع للمجال الكهربائي للموجة المتحركة في اتجاه $-z$.
وبشكل عام فإن \hat{E}_m^+ و \hat{E}_m^- أعداد مركبة ، أي أنها تعرف بمقدار وزاوية $\hat{E}_m^+ = E_m^+ e^{j\phi^+}$ و $\hat{E}_m^- = E_m^- e^{j\phi^-}$.

(2) كثافة الفيض المغناطيسي المرافق للمجال الكهربائي يعطى
كالتالي :-

$$\hat{B}_y(z) = \hat{B}_m^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{B}_m^- e^{j\beta_0 z} \quad (T)$$

$$= \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \hat{E}_m^+ e^{-j\beta_0 z} - \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \hat{E}_m^- e^{j\beta_0 z}$$

موجة تتحرك في اتجاه $-z$.
موجة تتحرك في اتجاه $+z$.

حيث أن $\frac{1}{c} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ، c : سرعة الضوء $(3 \times 10^8 \text{ m/s})$.

(3) غالباً ما يستخدم H "شدة المجال المغناطيسي" بدلاً من B :-

$$\hat{H}_y(z) = \hat{H}_m^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{H}_m^- e^{j\beta_0 z} \quad (A/m)$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{E}_m^+ e^{-j\beta_0 z} - \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{E}_m^- e^{j\beta_0 z}$$

$$= \frac{\hat{E}_m^+}{\eta_0} e^{-j\beta_0 z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\eta_0} e^{j\beta_0 z}$$

* حيث $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ تمثل معاوقة الموجة في الفراغ وتساوي $120\pi \Omega$.
* حيث $B = \mu H$.

(4) المعادلات ① و ② و ③ معطاة في الصورة المركبة .
للتعبير عن المجالات في الصورة الزمنية الحقيقية :-

$$E_x(z,t) = \text{Re} \{ \hat{E}_x(z) e^{j\omega t} \}$$

$$= \text{Re} \{ E_m^+ e^{j\phi^+} e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega t} + E_m^- e^{j\phi^-} e^{j\beta_0 z} e^{j\omega t} \}$$

$$= \text{Re} \{ E_m^+ e^{j(\omega t - \beta_0 z + \phi^+)} + E_m^- e^{j(\omega t + \beta_0 z + \phi^-)} \}$$

$$= E_m^+ \cos(\omega t - \beta_0 z + \phi^+) + E_m^- \cos(\omega t + \beta_0 z + \phi^-)$$

موجة تتحرك في
اتجاه +z

موجة تتحرك في
اتجاه -z

وبالمثل يمكن التعبير عن B أو H في الصورة الزمنية :-

$$B_y(z,t) = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E_m^+ \cos(\omega t - \beta_0 z + \phi^+) - \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E_m^- \cos(\omega t + \beta_0 z + \phi^-)$$

$$H_y(z,t) = \sqrt{\frac{E_m^+}{\eta_0}} \cos(\omega t - \beta_0 z + \phi^+) - \sqrt{\frac{E_m^-}{\eta_0}} \cos(\omega t + \beta_0 z + \phi^-)$$

"phase constant" β_0 يعطى بالعلاقة (5)

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \text{ (rad/m)}, \omega = 2\pi f$$

"wave length" λ الطول الموجي (6)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f}$$

(7) سرعة انتشار الموجة v_p :-

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_0} = c$$

أي أن الموجة الكهرومغناطيسية تنتشر في الفراغ بسرعة الضوء

(8) إذا رمزنا لمتجه الوحدة في اتجاه انتشار الموجة بالرمز \vec{a}_k ولمتجه الوحدة في اتجاه المجال الكهربائي بالرمز \vec{a}_e ولمتجه الوحدة في اتجاه المجال المغناطيسي بالرمز \vec{a}_h فإن العلاقة التالية يجب أن تتحقق

$$\vec{a}_e \times \vec{a}_h = \vec{a}_k$$

Problem #1

Show that $\hat{E}_x(z) = A e^{j(\beta_0 z + \phi)}$ is a solution of equation (2-112) for $\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

Solution

إذا كان $A e^{j(\beta_0 z + \phi)}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (2-112) فإنه يحققها :-

$$\frac{d^2}{dz^2} (A e^{j(\beta_0 z + \phi)}) + \beta_0^2 (A e^{j(\beta_0 z + \phi)}) = 0$$

$$\frac{d}{dz} (j\beta_0 A e^{j(\beta_0 z + \phi)}) + \beta_0^2 A e^{j(\beta_0 z + \phi)} = 0$$

$$-\beta_0^2 A e^{j(\beta_0 z + \phi)} + \beta_0^2 A e^{j(\beta_0 z + \phi)} = 0$$

~~≠~~

Problem #2

A uniform wave in free space has:

$$E = 10 \cos(2\pi \times 10^6 t - \beta z) \vec{a}_y$$

- What is the direction of propagation.
- Calculate β and λ .
- Find H .

Solution

a) اتجاه انتشار الموجة هو $+z$ كما هو واضح من الإشارة السالبة لـ βz .

b) بمقارنة المجال الكهربائي في المسألة بالصورة العامة للموجة الكهرومغناطيسية متحركة في اتجاه $+z$:-

$$E = E_m \cos(\omega t - \beta z)$$

نجد أن $\omega = 2\pi \times 10^6$ ومن ذلك :-

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 0.021 \text{ rad/m.}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0} \approx 300 \text{ m.}$$

c)

أولاً يجب أن نعرف القيمة القصوى لـ H :-

$$H_m = \frac{E_m}{\eta_0} = \frac{10}{120\pi} = 0.0265 \text{ A/m.}$$

أما بالنسبة لاتجاه H فمن العلاقة :-

$$\vec{a}_e \times \vec{a}_h = \vec{a}_k$$

حيث لدينا في المسألة $\vec{a}_k = \vec{a}_z$ و $\vec{a}_e = \vec{a}_y$ ومن ذلك :

$$\vec{a}_h = -\vec{a}_x$$

$$\therefore H(z,t) = -0.0265 \cos(2\pi \times 10^6 t - 0.021z) \vec{a}_x \text{ (A/m)}$$

Problem #3

The magnetic field component of an electromagnetic ~~field~~ wave propagating through

free space is :

$$H(z,t) = 25 \sin(\omega t + 6x) \vec{a}_y \text{ (mA/m)}$$

⑥

Determine:-

- The direction of wave propagation.
- The frequency of the wave.
- The electric field intensity.

Solution

a)

• اتجاه انتشار الموجة هو $-x$.

b)

$$\beta_0 = 6 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow \omega = \frac{6}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 18 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 286.5 \text{ MHz.}$$

c)

أولاً: القيمة القصوى لـ E :-

$$E_m = \eta_0 H_m = 120\pi \times 25 \times 10^{-3} = 9.425 \text{ (V/m)}$$

أما بالنسبة للاتجاه :-

$$\vec{a}_h = \vec{a}_y, \vec{a}_k = -\vec{a}_x \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{a}_z$$

$$\therefore E(x,t) = 9.425 \cos(18 \times 10^8 t + 6x) \vec{a}_z \text{ (V/m).}$$

Problem #4

The magnetic field of a uniform plane wave is given by $\hat{H} = \vec{a}_z 10 e^{-j10y}$.

a) Find \hat{E}

b) Find the time domain forms for E and H .

Solution

a)

- \vec{a}_y اتجاه انتشار الموجة
- \vec{a}_z اتجاه المجال المغناطيسي
- $-\vec{a}_x$ اتجاه المجال الكهربائي

$$\begin{aligned}\therefore \hat{E} &= -\vec{a}_x (10 \times 120\pi) e^{-j10y} \\ &= -\vec{a}_x 1200\pi e^{-j10y} \quad (\text{V/m})\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}H(y,t) &= \text{Re} \{ \hat{H}(y) e^{j\omega t} \} \\ &= \text{Re} \{ \vec{a}_z 10 e^{-j10y} e^{j\omega t} \} \\ &= \text{Re} \{ \vec{a}_z 10 e^{j(\omega t - 10y)} \} \\ &= \vec{a}_z 10 \cos(\omega t - 10y) \quad (\text{A/m})\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة :-

$$E(y,t) = -1200\pi \cos(\omega t - 10y) \vec{a}_x$$

Problem #5

Given:-

$$E(z,t) = 10^3 \cos(6 \times 10^8 t - \beta_0 z) \vec{a}_x \quad (\text{V/m})$$

in free space. Sketch the wave at $t=0$ and at time t_1 when it has travelled $\frac{\lambda}{4}$ along the z -axis. Find t_1, β_0, λ .

Solution

نعرف أن سرعة انتشار موجة كهرومغناطيسية في الهواء تساوي 3×10^8 .

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{\frac{\lambda}{4}}{3 \times 10^8}$$

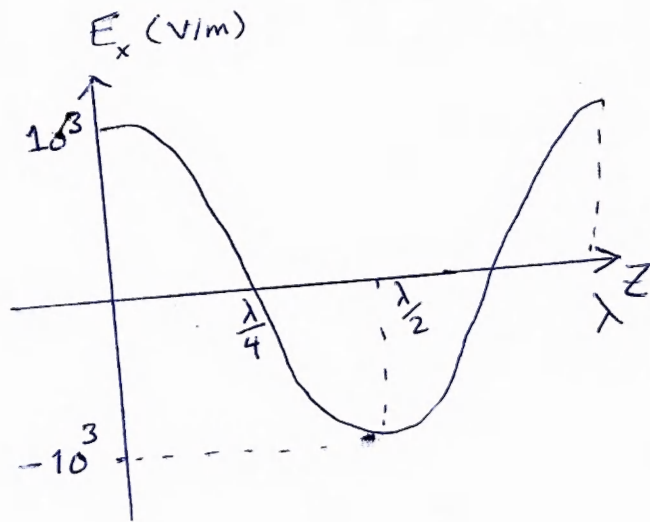
$$\omega = 6 \times 10^8 \text{ rad/s} \Rightarrow \beta_0 = \frac{6 \times 10^8}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2 \text{ rad/m.}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ m.}$$

$$\therefore t_1 = \frac{0.25\lambda}{3 \times 10^8} = \frac{0.25 \times \pi}{3 \times 10^8} = 2.62 \text{ ns}$$

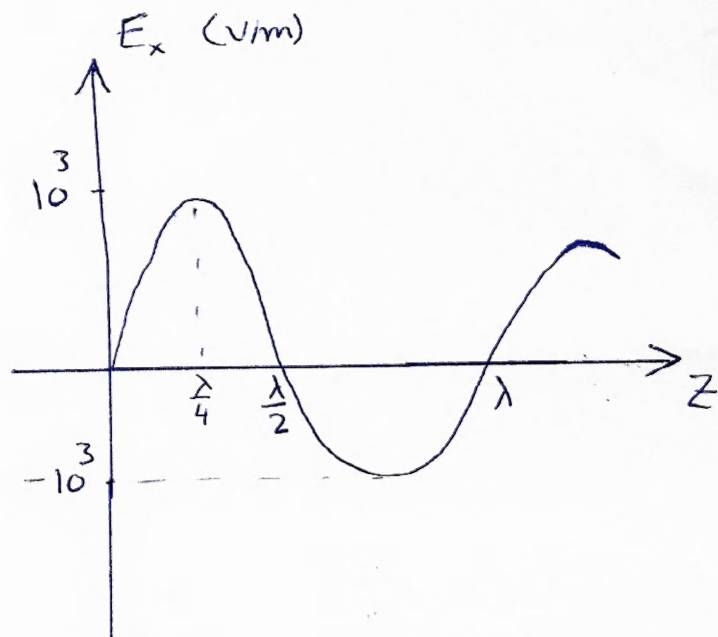
$$E(z,0) = 10^3 \cos(-\beta_0 z) = 10^3 \cos \beta_0 z \quad \text{عندما } t=0$$

⑨



$\therefore t = 2.62 \text{ ns}$ since

$$E(z, 2.62 \text{ ns}) = 10^3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 z\right) \\ = 10^3 \sin \beta_0 z$$



Problem #6

If $\hat{E} = \hat{E}_0 e^{-j\beta z}$, what polarization

correspond to:

a) $E_0 = \vec{a}_y$

b) $E_0 = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y$

c) $E_0 = \vec{a}_x - j\vec{a}_y$

Solution

بالنسبة لموجة مجالها الكهربائي مركب من مركبتين :-

$$E_z(z,t) = E_{mx}^+ \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \vec{a}_x + E_{my}^+ \cos(\omega t - \beta z + \phi_y) \vec{a}_y$$

"لاحظ أن كليهما ينتشر في اتجاه $+z$."

فإن استقطاب (polarization) هذه الموجة يكون له أحد الحالات التالية :-

1 - استقطاب خطي (linear polarization) :

وذلك إذا كان $\phi_x = \phi_y$ ، أي أنه لا يوجد فرق في الطور بين المركبتين .

فيكون المجال الكهربائي خطياً مستقيماً على امتداد انتشار الموجة يميل

بزواويه $\tan^{-1}\left(\frac{E_{my}}{E_{mx}}\right)$ عن محور x .

2 - استقطاب دائري (circular polarization)

وذلك إذا كان الفرق بين ϕ_x و ϕ_y هو 90° ، وفي نفس الوقت يكون $E_{mx} = E_{my}$. فيرسم المجال الكهربائي دائرة على امتداد انتشار الموجة يكون دورانها في اتجاه عقرب الساعة (clockwise) إذا كان $\phi_y - \phi_x = -90^\circ$ ، ويكون اتجاه الدوران عكس عقرب الساعة (counter clockwise) إذا كان $\phi_y - \phi_x = 90^\circ$.

3 - قطع ناقص (elliptical polarization)

وذلك إذا لم تتحقق شروط الاستقطاب الخطي أو الدائري .

a)

Linearly polarized wave (y-polarized).

وذلك لأنه لا توجد سوى مركبة واحدة للمجال الكهربائي .

b)

Linearly polarized wave

وذلك لعدم وجود فرق في الطور بين المركبتين . يميل خط المجال الكهربائي عن محور x بزاوية

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.4^\circ$$

c)

$$E_o = \vec{a}_x - j\vec{a}_y = \vec{a}_x + e^{-j90^\circ}\vec{a}_y$$

الاستقطاب يكون دائرياً لتساوي مقداري المركبتين ولوجود فرق طور 90° . اتجاه الدوران يكون في اتجاه عقرب الساعة لأن مركبة y متأخرة عن مركبة x ب 90° .

Problem #7 (Problem 2-45)

Prove (2-133) for the polarization ellipse obtained whenever E_x and E_y differ in phase by the general angle θ .

Solution

لدينا في المستوى $z = 0$

$$E_x = E_{mx} \cos(\omega t) \Rightarrow \cos \omega t = \frac{E_x}{E_{mx}} \longrightarrow (1)$$

$$E_y = E_{my} \cos(\omega t + \theta) \\ = E_{my} [\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta]$$

$$\frac{E_y}{E_{my}} = \cos \theta \frac{E_x}{E_{mx}} - \sin \theta \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}} \longrightarrow (2)$$

وذلك باستخدام المعادلة (1) والمتطابقة $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$ بتربيع طرفي المعادلة (2) :

$$\begin{aligned} \frac{E_y^2}{E_{my}^2} &= \cos^2 \theta \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} + \sin^2 \theta \left(1 - \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}\right) - 2 \frac{E_x}{E_{mx}} \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta - 2 \frac{E_x}{E_{mx}} \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

وباستخدام المتطابقة $2\cos^2\phi - 1$ $\therefore \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1$

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} = \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} (2\cos^2\theta - 1) + \sin^2\theta - 2 \frac{E_x}{E_{mx}} \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}} \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} + \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} = 2\cos^2\theta \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} + \sin^2\theta - 2 \frac{E_x}{E_{mx}} \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}} \sin\theta \cos\theta$$

$$= 2\cos\theta \frac{E_x}{E_{mx}} \left[\cos\theta \frac{E_x}{E_{mx}} - \sin\theta \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}} \right] + \sin^2\theta$$

ولكن ما بين القوسين المربعين هو $\frac{E_y}{E_{my}}$ وذلك من المعادلة (2):

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} + \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} = 2\cos\theta \frac{E_x}{E_{mx}} \frac{E_y}{E_{my}} + \sin^2\theta$$

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} + \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} - \frac{2\cos\theta}{E_{mx} E_{my}} E_x E_y - \sin^2\theta = 0$$

#

٣/ عبدالله عياد أبوقرين.

خريف 2012.